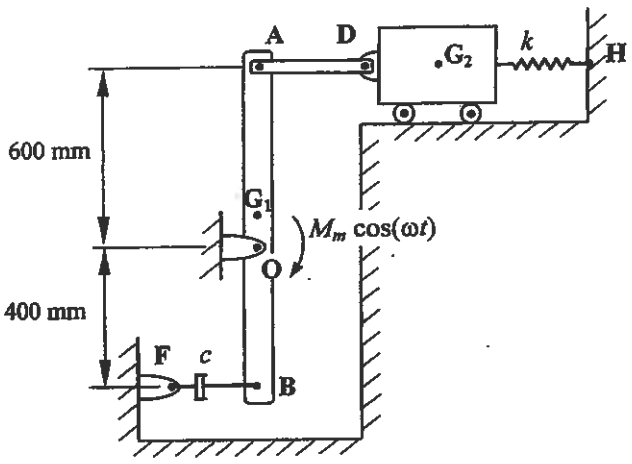


$\overline{AB} = \ell = 1$ m

$\overline{AG_1} = \frac{\ell}{2}$

O sistema representado na figura acima é constituído por uma barra rígida[1], de massa m_b=2 kg. A barra está articulada no ponto **O** e sujeita à acção de um momento motor $M_m \cos(\omega t)$. Está também ligada ao exterior no ponto **A** através de uma pequena barra (**AD**), de uma massa rígida de 2 kg e de uma mola com rigidez k=50 N/m. A barra **AD** é rígida e de massa desprezável. Os pontos **B** e **F** encontram-se ligados por um amortecedor viscoso. Admita que os deslocamentos são pequenos e que em repouso a barra se encontra na vertical.

a) Obtenha a equação do movimento.

Suponha que a equação do movimento é: $0.9\ddot{\theta}(t) + 0.09c\dot{\theta}(t) + 15.06\theta(t) = M_m \cos(\omega t)$

e determine:

b) a frequência natural, ω_n;

c) sabendo que o tempo que decorre entre dois picos sucessivos de vibração em regime livre é 2 segundos, calcule a constante de amortecimento c;

d) para uma frequência de excitação de 6 rad/s, calcule a amplitude (M_m) máxima do momento motor de modo a que a amplitude de vibração no ponto **A** não ultrapasse os 6 milímetros;

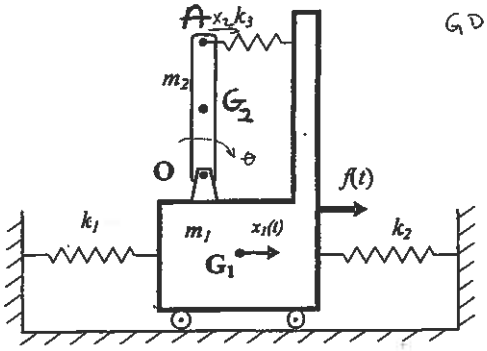
e) na situação da alínea anterior, obtenha as amplitudes das forças nos pontos **A** e **B**.

2 – O sistema representado na figura seguinte é constituído por duas molas, de rigidez k_1=1000 N/m e k_2= 2000 N/m, e por um carrinho rígido de massa m_1= 2.67 kg que translada horizontalmente (x_1(t)) sob a acção de uma força harmónica $f(t)$=F $\cos(\omega t)$, com F=3 N. Verificou-se que a máxima amplitude de vibração ocorre à frequência de 30 rad/s, que é também a frequência de funcionamento do sistema. Para resolver este problema, acrescentou-se uma barra rígida[1] ao corpo 1, articulada no ponto **O** (rotação θ(t)), de massa m_2=1 kg e comprimento L=0.1 m, e uma mola de rigidez k_3= 500 N/m.

[1] Nota: o momento de inércia de uma barra em relação a um eixo que passa pelo seu centro de gravidade é $I_G = \frac{1}{12} m\ell^2$

Exame de Vibrações de Sistemas Mecânicos Época Normal FEUP – DEMEGI 13 de Janeiro de 2006

Parte prática 2horas e 15 minutos PERMITIDA A CONSULTA DE UM TEXTO DE APOIO



GDL = x_1, θ ou x_1, x_2 ?

a) Determine as equações do movimento recorrendo ao formalismo de Lagrange.

b) Determine as frequências e as formas naturais de vibração do sistema.

c) Escreva as equações do movimento na base modal.

d) Qual deve ser o novo valor de k_3 de forma que a amplitude de vibração do carrinho seja nula.

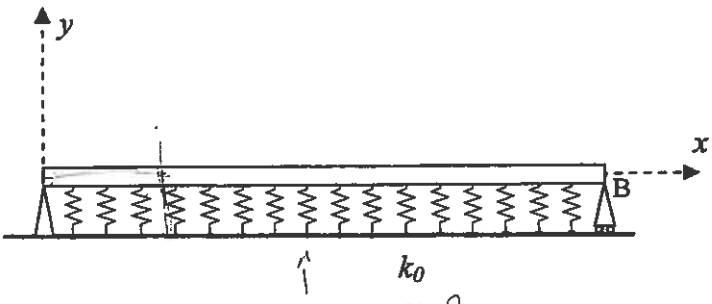
3 – Uma viga (flexível) de comprimento ℓ, de secção transversal com área A e segundo momento área I (m^4), módulo de elasticidade E e massa volúmica ρ, encontra-se apoiada nas duas extremidades e assente sobre uma fundação elástica de rigidez por unidade de comprimento k_0. Pretende-se analisar a vibração à flexão desta viga.

a) Escreva as condições de fronteira do sistema.

b) Verifique se a função $V(x) = \delta\, sen\left(\frac{\pi x}{\ell}\right)$ é uma função admissível.

c) Determine uma estimativa para a frequência fundamental de vibração do sistema.

d) Calcule o erro da estimativa anterior quando $k_0 \to 0$. Comente o resultado.



$\overline{AB} = \ell$

?

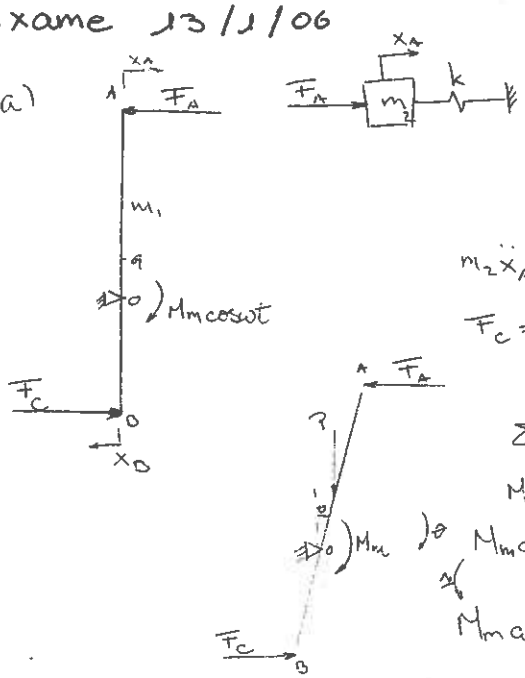
Fh equiv?

Exame 13/1/06

$AB = 1m$
$OG = 0,1$
$m_1 = m_2 = 2kg$
$k = 50 N/m$

$\dot{x}_O = OB\dot{\theta}$
$x_A = OA\theta$
$\ddot{x}_A = OA\ddot{\theta}$

1. a)



$m_2\ddot{x}_A = F_A - kx_A \Leftrightarrow m_2\ddot{x}_A + kx_A = F_A \Leftrightarrow F_A = m\,OA\ddot{\theta} + k\,OA\theta$

$F_C = C\dot{x}_O = C\,OB\dot{\theta}$

$\Sigma M_O = J_O\ddot{\theta}$

$M_m\cos\omega t + P\cdot OG\sin\theta - F_C\cdot OB\cos\theta - F_A OA\cos\theta = \left[J_G + m(OG)^2\right]\ddot{\theta}$

$M_m\cos\omega t + mg\cdot OG\sin\theta - C(OB)\dot{\theta}\cdot OB\cos\theta - (m\,OA\ddot{\theta} + k\,OA\theta)OA\cos\theta = \ldots$

$M_m\cos\omega t - mgOG\theta - C(OB)^2\dot{\theta} - (m\ddot{\theta} + k\theta)(OA)^2 = \left(J_G + m(OG)^2\right)\ddot{\theta}$

$\left(\frac{1}{12}m(AB)^2 + m(OG)^2 + m(OA)^2\right)\ddot{\theta} + C(OB)^2\dot{\theta} + \left(k(OA)^2 - mgOG\right)\theta = M_m\cos\omega t$

$0,9\ddot{\theta} + 0,16C\dot{\theta} + 16,04\theta = M_m\cos\omega t$

b) Supondo $0,9\ddot{\theta} + 0,09C\dot{\theta} + 15,06\theta = M_m\cos\omega t$

$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{15,06}{0,9}} = 4,09 \text{ rad/s}$

c) $T_d = 2s \qquad \omega_d = \frac{2\pi}{T_d} = \pi \text{ rad/s}$

$\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\xi^2} \Leftrightarrow \pi = 4,09\sqrt{1-\xi^2} \Rightarrow \xi = 0,64$

$\xi = \frac{C}{2m\omega_n} \Leftrightarrow C = 0,64\cdot 2\cdot 2\cdot 4,09 \Rightarrow C = 10,47 \text{ kg/s}$

d) $\omega = 6 \text{ rad/s} \qquad M_m = ? \Rightarrow x_A = 6mm$

$x_A = 0,6\cdot\theta \Rightarrow \theta = 10 \text{ rad}$

$\beta = \frac{\omega}{\omega_n} = 1,47$

$\theta = \frac{M_m/k}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}} = \frac{M_m/15,06}{\sqrt{(1-1,47^2)^2 + (2\cdot 0,64\cdot 1,47)^2}} = 10$

$M_m \overset{N}{=} 333 \text{ Nm}$

e) $F_A = m_2\cdot 0,6\,\ddot{\theta}(t) + k\cdot 0,6\,\theta(t)$

$\theta(t) = \Theta\cos(\omega t - \phi)$
$\dot{\theta}(t) = -\omega\Theta\sin(\omega t - \phi)$
$\ddot{\theta}(t) = -\omega^2\Theta\cos(\omega t - \phi)$

Amplitude $F_A = 0,6\cdot 2\cdot\omega^2\cdot\Theta + 0,6k\Theta$

$F_C = -\omega\Theta C\cdot 0,1$

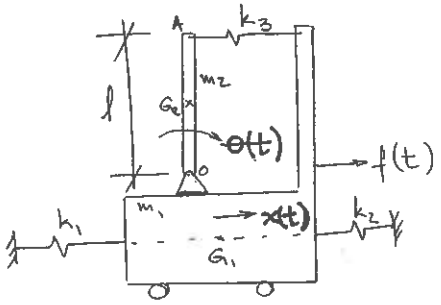
2. $k_1 = 1000 N/m$; $k_2 = 2k_1$; $k_3 = \frac{k_1}{2}$

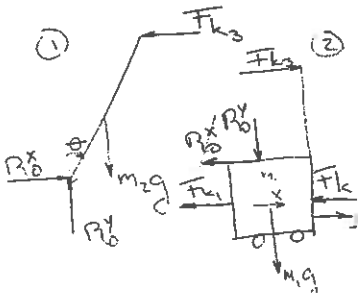
$m_1 = 2,67\ kg$, $m_2 = 1\ kg$

$f(t) = F\cos\omega t$, $F = 3N$

$X(\omega)\Big|_{máx} \longrightarrow \omega = 30\ rad/s$

$\ell = 0,1\ m$





a) Pelo formalismo de Lagrange $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right) + \frac{\partial T}{\partial q} + \frac{\partial V}{\partial q} = Q$

$T = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{x}^2 + \frac{1}{2}J_o^2\dot{\theta}^2$

$J_o = J_{G_1} + m_2 OG_2^2 = \frac{1}{12} m_2 (OA)^2 + m_2 (OG_2)^2 = \frac{1}{12}\cdot 1 \cdot 0,1^2 + 1 \cdot 0,05^2 = 3,33\cdot 10^{-3}\ kg\cdot m^2$

$V = \frac{1}{2}(k_1 + k_2)x^2 + \frac{1}{2}k_3(\ell\theta)^2$

$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_x}\right) = (m_1+m_2)\ddot{x}$; $\frac{\partial T}{\partial q_x} = 0$; $\frac{\partial V}{\partial q_x} = (k_1+k_2)x$

$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\theta}\right) = J_o^2\cdot\ddot{\theta}$; $\frac{\partial T}{\partial q_\theta} = 0$; $\frac{\partial V}{\partial q_\theta} = k_3\ell^2\theta$

$$\begin{cases} (m_1+m_2)\ddot{x} + (k_1+k_2)x = f(t) \\ J_o^2\,\ddot{\theta} + k_3\ell^2\theta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} m_1+m_2 & 0 \\ 0 & J_o^2 \end{bmatrix}\begin{vmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{vmatrix} + \begin{bmatrix} k_1+k_2 & 0 \\ 0 & k_3\ell^2 \end{bmatrix}\begin{vmatrix} x \\ \theta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f(t) \\ 0 \end{vmatrix}$$

b)

$$\begin{vmatrix} k_1+k_2-\omega^2(m_1+m_2) & 0 \\ 0 & k_3\ell^2 - \omega^2 J_o^2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (k_1+k_2)k_3\ell^2 - \left[(k_1+k_2)J_o^2 + (m_1+m_2)k_3\ell^2\right]\omega^2 + (m_1+m_2)J_o^2\,\omega^4 = 0$$

$$0,0122\,\omega^4 - 28,55\,\omega^2 + 15000 = 0 \quad \begin{vmatrix} \omega_1^2 = 817,41 \\ \omega_2^2 = 1500,1 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} \omega_1 = 28,59 \\ \omega_2 = 38,73 \end{vmatrix} [rad/s]$$

$$\begin{bmatrix} 0,1857 & 0 \\ 0 & 2,275 \end{bmatrix}\begin{vmatrix} u_{11} \\ u_{21} \end{vmatrix} = 0 \qquad |u|_1 = \begin{vmatrix} 0,1857 \\ 2,275 \end{vmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -2505,05 & 0 \\ 0 & -4,3\cdot 10^{-5} \end{bmatrix}\begin{vmatrix} u_{12} \\ u_{22} \end{vmatrix} = 0 \qquad |u|_2 = \begin{vmatrix} -2505,05 \\ -4,3\cdot 10^{-5} \end{vmatrix}$$

c) $|\phi| = \frac{|u|}{\sqrt{|u|^T[m]|u|}}$

$$|\phi|_1 = \begin{vmatrix} 0,4897 \\ 5,999 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0,5 \\ 6 \end{vmatrix} \quad , \quad |\phi|_2 = \begin{vmatrix} -0,522 \\ -0,960\,10^{-9} \end{vmatrix} \qquad [\Phi] = [|\phi|_1\ |\phi|_2]$$

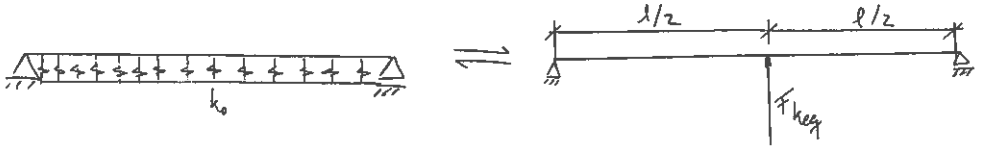
$$[\Im]\,|\ddot{\eta}| + [\Omega^2]\,|\eta| = [\Phi]\,|f(t)|$$

$$\begin{cases} \ddot{\eta}_1 + 817,41\,\eta_1 = 0,4897\,f(t) \\ \ddot{\eta}_2 + 1500\,\eta_1 = 6\,f(t) \end{cases}$$

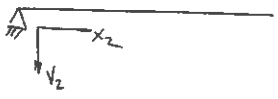
d) $[z]\,|x| = |F|$

$$[\ ]\begin{vmatrix} x \\ \theta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} F \\ 0 \end{vmatrix} \rightarrow X(\omega) = 0 \rightarrow k_3 = ?$$

5.

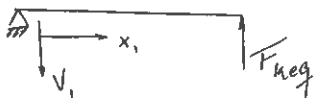


a)



$V_2(0,t) = 0$ ✓

$EI \frac{\partial^2 V_2(0,t)}{\partial x_2^2} = 0$



$V_1(0,t) = 0$ ✓

$EI \frac{\partial^2 V_1(0,t)}{\partial x_1^2} = 0$

$EI \frac{\partial^3 V_1(l/2,t)}{\partial x_1^3} + F_{keq} = EI \frac{\partial^3 V_2(l/2,t)}{\partial x_2^2}$

$V_1(l/2,t) = V_2(l/2,t)$ ✓

$\frac{\partial V_1(l/2,t)}{\partial x_1} = -\frac{\partial V_2(l/2,t)}{\partial x_2}$ ✓

$EI \frac{\partial^2 V_1(l/2,t)}{\partial x_1^2} = EI \frac{\partial^2 V_2(l/2,t)}{\partial x_2^2}$

b) $V(x) = \delta \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{l} x\right)$

1º. Flexão é sist. de 4ª ordem preciso ter $V''(x)$. ✓ f trig.

2º Verificar as cond de fronteira geometricas:

$V(0) = 0 \quad \delta \operatorname{sen} 0 = 0$ ✓

$V_1(l/2) = V_2(l/2) = V(l/2)$ ✓

$\frac{\partial V_1}{\partial x_1} = -\frac{\partial V_2}{\partial x_2}$ ✓

$\frac{d^2 V}{dx^2} = -\delta \left(\frac{\pi^2}{l^2}\right) \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{l} x\right)$

c) $T_{max} = \frac{1}{2}\omega^2 \int_0^{l/2} \rho A \, \delta^2 \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{l} x_1\right) dx_1 + \frac{1}{2}\omega^2 \int_0^{l/2} \rho A \delta^2 \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{l} x_2\right) dx_2$

$T_{max} = \frac{1}{2}\omega^2 \rho A \delta^2 \cdot \frac{l}{2} = \omega^2 \cdot \rho A \frac{l}{4} \delta^2$

$V_{max} = \frac{1}{2} \int_0^{l/2} EI \left[\delta \frac{\pi^2}{l^2} \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{l} x_1\right)\right]^2 dx_1 + \frac{1}{2} \int_0^{l/2} EI \left[-\delta \frac{\pi^2}{l^2} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{l} x_2\right)\right]^2 dx_2 + \frac{1}{2} k l \left[\delta \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{l} \cdot \frac{l}{2}\right)\right]^2$

$V_{max} = \frac{\delta^2 k l}{2} + \frac{\pi^4 EI \delta^2}{4 l^3}$

$\omega = \sqrt{\frac{4}{\rho A l \delta^2}\left(\frac{\delta^2 k l}{2} + \frac{\pi^4 EI \delta^2}{4 l^3}\right)} = \sqrt{\frac{1}{\rho A l}\left(2 k l + \frac{\pi^4 EI}{l^3}\right)} = \sqrt{\frac{1}{\rho A l^4}\left(2 k l^4 + \pi^4 EI\right)}$

d) $k = 0 \quad V_{max} = \frac{\pi^4 EI \delta^2}{4 l^3} = \omega^2 \rho A \frac{l}{4} \delta^2 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{\pi^4 EI}{\rho A l^4}}$

$\varepsilon = \left| \sqrt{\frac{\pi^4 EI}{\rho A l^4}} - \sqrt{\frac{1}{\rho A l^4}\left(2 k l^4 + \pi^4 EI\right)} \right| \Big/ \sqrt{\frac{1}{\rho A l^4}\left(2 k l^4 + \pi^4 EI\right)} =$